

**ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
ВЕРСИТЕТ**
Кафедра теоретической и экспериментальной ядерной физики

**Методические указания для практических
занятий по курсу
Дополнительные главы квантовой механики**

ОДЕССА 2007

**ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
ВЕРСИТЕТ**
Кафедра теоретической и экспериментальной ядерной физики

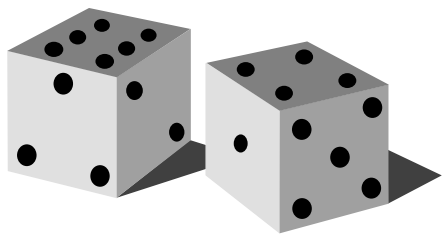
**Методические указания для практических
занятий по курсу
Дополнительные главы квантовой механики**

Утверждены на заседании ка-
федры ТЭЯФ №1 вот
29.08.2007

ОДЕССА 2007

**Методические указания для практических занятий по курсу До-
полнительные главы квантовой механики**

Некоторые основные понятия теории вероятностей.



Напомним сначала некоторые определения.

Событие, которое при одних и тех же *контролируемых* условиях может или произойти или не произойти называется случайным событием.

Величина, которая при многократных измерениях, проводимых при одних и тех же контролируемых условиях измерения может принимать различные значения называется слу-

чайной величиной.

Случайные величины бывают двух типов – дискретные и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, любые два различных значения которой отличаются не меньше чем на какое-то число. Например, при столкновении частиц высоких энергий, достигаемых в ускорителях образуются новые частицы. Т.э. если сталкиваются, например, два протона, разогнанные к больших энергий, то в результате столкновения, помимо этих двух протонов образуются π - мезоны. Число этих образующихся частиц случайно. Это значит что если много раз сталкивать протоны, разогнанные к одной и той же энергии, то в различных экспериментах мы будем наблюдать различное количество π - мезонов. При этом, очевидно, результаты двух различных экспериментов, если они не совпадают, могут отличаться не меньше чем на одну частицу. Поэтому число частиц образующихся в столкновениях при высоких энергиях является дискретной случайной величиной.

Непрерывной случайной величиной, называется такая случайная величина, любые два несовпадающих значения которой могут отличаться сколь угодно имело. Например координата электрона на фотопластинке, в опыте по дифракции электронов является случайной величиной, потому что разные электроны, выпущенные из источника при одинаковых контролируемых условиях попадают у точки с различными координатами. При этом координаты двух электронов на фотопластинке при любом выборе единиц, в которых они измеряются, могут в принципе отличаться и на 0.1 и на 0.01 и на 0.001 и т.д. Т.э. мы принципиально не можем указать такого числа, чтобы результаты измерения координат двух электронов отличались не меньше чем на такое число. Координаты электронов на фотопластинке в опыте по дифракции электронов могут отличаться сколь угодно имело.

В связи с рассмотренным различием между дискретными и непрерывными случайными величинами они требуют несколько отличающихся методов описания. Более просто описываются дискретные случайные величины.

Для описания дискретной случайной величины рассмотрим определение вероятности данного значения этой величины. Предположим, что мы проводим большое количество измерений значения этой величины при одинаковых контролируемых условиях. Обозначим количество измерений через N . Отберем из результатов этих N измерений то количество измерений, в которых получилось какое-то одно, интересующее нас, значение этой величины. Обозначим это количество измерений n . Очевидно количество измерений, в которых получается интересующее нас значение случайной величины будет, вообще говоря, зависеть вот полного количества проведенных измерений. Чем больше мы проводим измерений, тем большее количество раз будет получаться каждое из возможных значений рассматриваемой случайной величины. Поэтому более точным будет обозначить количество случаев, в которых получилось интересующее нас значение случайной величины через $n(N)$. За мэру вероятности интересующего нас значения дискретной случайной величины можно было бы принять выражение $\frac{n(N)}{N}$. Однако это выражение обладает тем очевидным недостатком, что оно зависит вот ко-

личества проведенных измерений. Поэтому проводя разное количество измерений N мы получали бы разные значения для вероятности одного и того же события при одних и тех же усло-

виях. Опыт показывает, что при увеличении числа измерений N к очень больших значений, отношение $\frac{n(N)}{N}$, называемое обычно частотой интересующего нас значения случайной величины, практически перестает зависеть от N . В связи с этим дадим следующее определение.

Обозначим самую рассматриваемую дискретную случайную величину через X (например X может означать число частиц образовавшихся при столкновении двух частиц при высоких энергиях), а принимаемый ею дискретный ряд значений через $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$.

Вероятностью $p(x_i)$ данного значения x_i дискретной случайной величины X называется предел отношения числа случаев $n(N)$, когда в результате измерения случайной величины X получилось это значение x_i к общему числу проведенных измерений N при числе измерений стремящемся к бесконечности:

$$p(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(N)}{N}.$$

Полное описание дискретной случайной величины можно осуществить задав все множество значений, которое она может принимать, а так же вероятности каждого из этих значений.

Рассмотрим теперь непрерывную случайную величину. Существенное отличие описания непрерывной случайной величины от описания дискретной случайной величины состоит в том, что, как мы сейчас увидим, для непрерывной случайной величины не имеет смысла говорить в вероятности данного ее значения. Сначала поясним сказанное, следующим примером. Предположим, что мы попытались бы говорить в вероятности данного ее значения. Обозначим снова случайную величину через X (только теперь это непрерывная а не дискретная величина, как было выше). Например, в вероятности значения $x = 1.5$ (в каких-то единицах, для нас сейчас не имеет значения в каких). Тогда мы должны были бы попытаться провести большое количество N измерений отобрать из их $n(N)$ измерений в которых получилось данное значение этой величины. Но для непрерывной случайной величины это сделать невозможно, т.к. рядом со значением $x = 1.5$ могут быть сколь угодно близкие значения этой величины. Поэтому если нас интересует значение $x = 1.5$, то это означает что речь идет в числе $x = 1.5000\dots$, где троеточие означает, что в этом числе всюду к бесконечности идут нули. Но возникает вопрос в том, как нам убедиться в том что в том или ином эксперименте у нас действительно получилось значение $x = 1.5000\dots$. Действительно, ведь любой прибор, с помощью которого мы будем производить измерения не может измерить значение величины с точностью к бесконечного числу десятичных знаков. Пусть, например, прибор которым мы пользуемся позволяет определить три знака после запятой. Если измерение этим прибором дало результат $x = 1.500$, то это не означает, что в этом измерении получилось интересующее нас число $x = 1.5000\dots$, т.к. мы ничего не знаем в том что в измеренном значении стоит в четвертом, пятом и т.д. знаке после запятой. В этом смысле измеренное значение можно представить в виде $x = 1.500???\dots$. Отсюда видно, что для непрерывной случайной величины мы просто не сможем построить величину $n(N)$, т.е. не сможем отобрать те эксперименты в которых действительно получилось интересующее нас значение непрерывной случайной величины.

Есть и более глубокие основания для утверждения в том, что для непрерывной случайной величины не имеет смысла понятие в вероятности данного ее значения. Для непрерывной случайной величины множество значений, которое она может принимать можно изобразить некоторым отрезком числовой прямой, а каждое ее значение изобразится точкой этого отрезка.

Если мы разобьем этот отрезок на несколько непересекающихся частей, то вот вероятностей естественно потребовать, чтобы вероятность попадания значения случайной величины в отрезок была равна сумме вероятностей ее попадания в каждую часть этого отрезка. Если пытаться говорить в вероятности отдельного значения непрерывной случайной величины, т.е. в вероятности попадания ее значения в точку этого отрезка, то такие вероятности должны были бы делиться так чтобы вероятность попадания в отрезок была равна сумме вероятностей попадания во все точки этого отрезка. Вот здесь и возникает основная проблема. Дело в том, что сложение – операция, которая на каждом шаге может производиться только над двумя числами. Поэтому, когда мы производим сложение большого количества чисел мы делаем это следующим образом – к первому числу прибавляем второе, потом к их сумме – третье, потом к сумме первых трех – четвертое и т.д. При этом этот процесс может продолжаться и к бесконечности, если сумма $k - 1$ первых чисел с k -тым числом стремится к определенному пределу при $k \rightarrow \infty$. Однако, как видно из сказанного, возможность просуммировать какое-либо количество чисел (пусть даже и бесконечное) предполагает возможность их пересчитать, т.е. каждому из них приписать определенный номер (вспомним мы складывали “первое” число со “вторым”, потом сумму с “третьим” и т.д.). В то же время, можно строго доказать, что точек на любом отрезке слишком много, чтобы их можно было перенумеровать. Это выражают обычно словами в том, что множество точек дорогого отрезка несчетно. Какого либо определения для суммы несчетного множества чисел не существует. Поэтому если бы мы попытались определить вероятность попадания значения непрерывной случайной величины в точку, то нам не удалось бы сделать это так чтобы сумма вероятностей попадания во все точки отрезка была равна вероятности попадания в отрезок.

При описании непрерывной случайной величины, всех перечисленных недостатков можно избежать если вместо того чтобы интересоваться вероятностью попадания значения случайной величины в точку рассмотреть вероятность попадания ее значения в некоторый малый (в каком смысле малый будет рассмотрено в дальнейшем) отрезок, примыкающий к данной точке. Если мы снова вернемся к примеру с прибором, который измеряет значения измеряемой величины с точностью к трем знакам после запятой, то имея рассмотренный выше результат измерения $x = 1.500???.\dots$, мы независимо неизвестных нам вот значений цифр, замененных знаками вопроса можем утверждать что $1.500 \leq x < 1.501$. Причем ограничивающие значение x числа могут рассматриваться как точные (т.е. с точными нулями во всех не выписанных разрядах после запятой). Поэтому если мы поставим вопрос в вероятности того, что значение непрерывной случайной величины попадет в интервал $[1.500, 1.501)$, то имея прибор, измеряющий три знака после запятой, мы для каждого измерения сможем точно сказать попало оно в этот интервал или нет. А это дает возможность обычным образом определить вероятность попадания в произвольный интервал $[x, x + \Delta x)$. Для этого нужно провести N измерений, отобрать из их то $n(N)$, которые дали значения, попадающие в этот интервал (теперь это в принципе можно сделать, как это только что обсуждалось), и найти отношение $\frac{n(N)}{N}$. После чего найти предел этого выражения при $N \rightarrow \infty$.

Заметим так же, что рассмотрение вероятности попадания в интервал вместо вероятности попадания в точку снимает и другую рассмотренную нами проблему. Если отрезок из которого может принимать значения непрерывная случайная величина разбивать на отрезки, то этих отрезков может быть столько много, сколько мы захотим, длина дорогого из них может быть сделана за счет увеличения их количества настолько малой насколько мы этого захотим, однако число этих отрезков будет всегда счетным. Т.э. как бы много их ни было, мы всегда сможем их перенумеровать. А тогда, определяя вероятность попадания значения случайной величины в каждый из этих отрезков, мы всегда сможем просуммировать эти вероятности. Поэтому при надлежащем определении вероятности попадания непрерывной случайной величины в каждый маленький отрезок мы всегда сможем добиться того, чтобы сумма вероятностей по-

падания во все отрезки на которые разбивается область изменения непрерывной случайной величины была равна вероятности попадания во всю область.

Рассматривая для непрерывной случайной величины вероятность попадания ее значения в некоторый малый отрезок $[x, x + \Delta x)$, мы сталкиваемся с другой проблемой. Эта вероятность, которую мы будем обозначать ΔP будет зависеть вот двух переменных – вот x и вот Δx . Для того чтобы в этом убедиться нам нужно несколько подправить предыдущие обозначения. А именно, если мы выделим отрезок $[x, x + \Delta x)$, и проведем N измерений, то число случаев n когда значение измеряемой величины попало в этот отрезок будет зависеть не только вот числа проведенных измерений N , но и, что совершенно очевидно – вот ширины интервала Δx (ясно, что чем более широкий мы возьмем интервал, тем большее количество измерений будет в него попадать). Но кроме того при одинаковых N и Δx , это число будет разным для разных x . Вспомним по этому поводу опыт по дифракции электронов. Количества электронов попадающие в два отрезка одной и той же ширины Δx , но отсчитанные вот точки максимума почернения и вот точки минимума очевидно будут разными. Поэтому количество экспериментов в которых значение измеряемой величины попало в интервал $[x, x + \Delta x)$, правильнее будет обозначить через $n(N, x, \Delta x)$. Тогда после того как мы составим отношение $\frac{n(N, x, \Delta x)}{N}$ и устремим $N \rightarrow \infty$, зависимость вот N за счет предельного перехода вы-

падет, и останется зависимость только вот x и Δx . Поэтому вероятность попадания значения случайной величины в отрезок $[x, x + \Delta x)$ будет зависеть вот x и Δx :

$$\Delta P(x, \Delta x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(N, x, \Delta x)}{N}.$$

Зависимость вероятности ΔP вот x является “хорошей” в том смысле что она отражает некоторую физическую закономерность. В частности, в эксперименте по дифракции электронов именно по этой зависимости можно судит что происходит дифракция. Зависимость вот Δx является “плохой”, т.к. она отражает лишь наш произвол в выборе ширины отрезка, для которого мы рассматриваем вероятность. Можно сказать что она является вынужденной, т.к. оказавшись вынужденными для непрерывной случайной величины рассматривать вероятность попадания в отрезок мы получили величину зависящую вот ширины этого отрезка. В то же время нет какого-либо физического принципа, вследствие которого эту величину нужно было бы выбирать такой-то и никакой другой. Она произвольна, и два наблюдателя, изучающие одно и то же явление могут выбирать ее по-разному, и вследствие этого - по-разному описывать одно и то же явление.

Существует однако возможность “избавиться” вот “плохой” зависимости, сохранив при этом “хорошую”. Заметим, что если мы непосредственно в выражении $\Delta P(x, \Delta x)$ перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ то получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta P(x, \Delta x) = 0$ при любом x . Т.э. действуя таким

образом мы “избавляясь” вот “плохой” зависимости потеряем и “хорошую”. Однако если мы рассмотрим предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P(x, \Delta x)}{\Delta x}$, то вон уже не будет вообще говоря равен нулю, а будет

некоторой функцией вот x . А, значит, - будет содержать только “хорошую” зависимость. В связи с этим рассмотрим следующее определение. *Плотностью вероятности $\rho(x)$ непрерывной случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности $\Delta P(x, \Delta x)$ попадания этой величины в интервал $[x, x + \Delta x)$ к ширине этого интервала при ширине интервала, стремящейся к нулю:*

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P(x, \Delta x)}{\Delta x}.$$

Для квантовой механики представляет интерес случай, когда имеется не одна непрерывная случайная величина, а одновременно три. Речь идет в трех координатах точки в пространстве x, y, z . Вторыми словами можно сказать, что нас интересует случайный вектор \vec{r} с координатами (x, y, z) . Для такой величины проводя рассуждения, аналогичные рассмотренным выше можно прийти к выводу, что не имеет смысла говорить в вероятности того, что вектор \vec{r} придет в данную точку. Можно лишь выбрав в пространстве некоторую точку A с радиус вектором \vec{r}_A , описать вокруг нее объем ΔV и поинтересоваться вероятностью того, что вектор \vec{r} , будучи отложенным вот начала координат, попадет в этот объем. Тогда эта вероятность ΔP будет зависеть вот \vec{r}_A и вот ΔV . Т.э. мы опять получим “хорошую” и “плохую” зависимость. Для того чтобы избавиться вот “плохой” зависимости, поступим следующим образом. Обозначим через d наибольшее из расстояний между точками области ΔV , которую мы описали вокруг точки A . Тогда плотностью вероятности случайного вектора \vec{r} в точке \vec{r}_A

мы назовем величину $\rho(\vec{r}_A) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta P(\vec{r}_A, \Delta V)}{\Delta V}$. Т.э. *плотностью вероятности случайного вектора \vec{r} в точке с радиус-вектором \vec{r}_A мы назовем предел отношения вероятности попадания вектора \vec{r} в малый объем ΔV , описанный вокруг точки с радиус-вектором \vec{r}_A , к величине этого объема при условии что этот объем стягивается в точку.*

Если мы пытаемся измерить радиус-вектор микрообъекта, то, как будет видно в дальнейшем, вероятность $\Delta P(\vec{r}_A, \Delta V)$ может вообще говоря зависеть вот времени. Тогда вот времени будет зависеть и плотность вероятности. В этом случае получим следующее определение $\rho(\vec{r}_A, t) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta P(\vec{r}_A, \Delta V, t)}{\Delta V}$.

Центральное место в квантовой механике играет однако не плотность вероятности, а *амплитуда вероятности* $\Psi(\vec{r}_A, t)$. Амплитуда вероятности является функцией, принимающей вообще говоря комплексные значения и связана с плотностью вероятности следующим соотношением

$$\rho(\vec{r}_A, t) = \Psi(\vec{r}_A, t)\Psi^*(\vec{r}_A, t) = |\Psi(\vec{r}_A, t)|^2.$$

Здесь звездочка означает комплексное сопряжение. Задача расчета амплитуды вероятности является основной задачей в квантовой механике.

Моменты случайной величины.

Рассмотрим понятие математического ожидания случайной величины. Сначала предположим что речь идет в дискретной случайной величине. Будем обозначать эту величину через X . Предположим что нам известна полная характеристика этой случайной величины. Т.э. мы знаем все ее возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (которых может быть и бесконечное число) и знаем их вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. Пусть мы произвели большое количество N измерений значения этой величины и хотим рассчитать среднее арифметическое из результатов проведенных измерений. Тогда мы должны сложить все результаты проведенных измерений, а затем полученную сумму поделить на количество слагаемых, которое равно количеству проведенных измерений N .

При этом расчет суммы результатов всех измерений можно представить следующим образом. Т.к. в рассматриваемой серии из N измерений не могут появиться какие-то числа кроме $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, то результат проведенной серии измерений можно указать если сказать сколько раз появилось каждое значение x_i . Обозначим число которое показывает сколько раз в серии из N измерений в результате измерения получалось число x_i через $n_i(N)$. Тогда если мы сложим результаты проведенных N измерений, то в этой сумме будет $n_i(N)$ слагаемых равных x_i . Поэтому среднее арифметическое из результатов проведенных измерений можно

записать в виде
$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} n_i(N)x_i}{N} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i(N)}{N} x_i$$
. Рассмотрим предел этого выражения при

$N \rightarrow \infty$. Тогда исходя из данного ранее определения вероятности данного значения дискретной случайной величины получим следующий результат: предел среднего арифметического из результатов N измерений значения дискретной случайной величины равен
$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$
.

Определение. Математическим ожиданием, или первым начальным моментом дискретной случайной величины X , которая может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ называется число $\langle X \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$.

По причинам, которые ясны из того, что было сказано выше, математическое ожидание случайной величины часто называют ее средним значением. Его обычно обозначают посредством угловых скобок, как это было сделано выше.

Помимо первого начального момента можно рассмотреть второй, третий и т.д. Вообще k -тый начальный момент дискретной случайной величины определяется следующим образом

$$\langle X^k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i)^k.$$

Помимо начальных моментов случайной величины рассматривают так же ее центральные моменты. Если через $\langle X \rangle$ обозначить математическое ожидание рассматриваемой дискретной случайной величины, то k -тым центральным моментом этой величины называется число
$$\langle (X - \langle X \rangle)^k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - \langle X \rangle)^k$$
.

Некоторые математические понятия, используемые в квантовой механике.

Линейные пространства и операторы.

Общие сведения в линейных пространствах

При рассмотрении различных задач мы встречаемся с совершенно различными объектами, для которых определены операции сложения и умножения на число. Например, любые два действительных или комплексных числа можно сложить между собой и умножить на произвольное число. При этом, проводя эти действия с действительными числами, мы в результате получим действительное число, а проводя эти действия с комплексными числами, мы в результате их выполнения получим комплексное число. Причем, если обозначить через a, b, c, \dots и

т.д. произвольные действительные или комплексные числа то, как хорошо известно, для операций сложения и умножения на число выполняются свойства

$$\begin{aligned} a + b &= b + a; \\ (a + b) + c &= a + (b + c); \\ (ab)c &= a(bc); \\ (a + b)c &= ac + bc; \\ a(b + c) &= ab + ac. \end{aligned}$$

Кроме того, имеется такое число 0 , которое обладает свойством $a + 0 = a$ для любого числа a , и для каждого числа a имеется такое число $(-a)$, что $a + (-a) = 0$.

Но если мы рассмотрим объекты, совершенно не похожие на числа – трехмерные векторы, которые можно изображать направленными отрезками, то как известно, для них так же можно определить операции сложения и умножения на число. Причем эти операции подразумевают совершенно другие действия, чем те, которые можно делать при сложении числа с числом и умножении числа на число. Однако свойства в операциях над векторами точно такие же как и в операциях над числами. При сложении двух векторов снова получаем вектор, умножая вектор на число – снова получаем вектор, и если обозначить, как обычно через $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ – векторы, а через $k, r \dots$ – числа, то

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}; \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}); \\ (kr)\vec{a} &= k(r\vec{a}); \\ (k + r)\vec{a} &= k\vec{a} + r\vec{a}; \\ k(\vec{a} + \vec{b}) &= k\vec{a} + k\vec{b}. \end{aligned}$$

И опять существует такой вектор $\vec{0}$, что для любого вектора \vec{a} имеет место равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ и для любого вектора \vec{a} , существует такой вектор $(-\vec{a})$, для которого $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Следующим примером является множество многочленов от одной переменной степени не выше чем некоторое целое положительное число n . Их опять же по известным алгебраическим правилам можно складывать и умножать на числа и при этом опять будут получаться многочлены степени, не превышающей n . Причем, если в перечисленных выше свойствах, векторы заменить на многочлены, то мы получим перечень свойств, справедливых и для многочленов.

Еще одним примером является множество непрерывных функций, заданных на промежутке $[a, b]$. Произведением функции $f(x)$ на число k называется функция которая числу x сопоставляет число, равное произведению числа k на число, которое числу x сопоставляет функция $f(x)$. Суммой функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция, которая числу x сопоставляет число, равное сумме того числа, которое числу x сопоставляет функция $f(x)$ с тем числом, которое числу x сопоставляет функция $g(x)$. И опять, складывая любые два элемента рассматриваемого множества, или умножая любой элемент этого множества на число, мы снова получим элемент того же множества. Причем, перечисленные выше свойства сложения векторов и умножения их на число полностью применимы и к рассматриваемому множеству функций.

Аналогичных примеров можно было бы привести еще очень много, выбирая в качестве этих примеров множества совершенно разнородных объектов.

Пусть имеется множество произвольных объектов, для которых определены операции сложения и умножения на число.

Комбинируя операции сложения и умножения на число можно получить операцию, которая называется линейной комбинацией. А именно, если имеется множество, состоящее из элементов, для которых определены операции сложения и умножения на число и если f и g - любые элементы этого множества, то выражение $\alpha f + \beta g$, где α и β - числа, называется линейной комбинацией элементов f и g с коэффициентами α и β .

Особый интерес представляют множества, обладающие тем свойством, что линейная комбинация любых двух элементов такого множества снова есть элемент этого множества и для сложения элементов этого множества имеют место все те же свойства что были перечислены выше для векторов. Множества, обладающие этими свойствами, называют линейными пространствами. В частности во всех рассмотренных выше примерах мы имели дело с линейными пространствами.

Пусть, например нам задан дифференциальное уравнение

$$\alpha(x) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + \beta(x) \frac{dy}{dx}(x) + \gamma(x)y(x) = 0,$$

где $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ - произвольные функции, а $y(x)$ - неизвестная функция. Множество решений этого уравнения есть линейное пространство, т.к. если мы рассмотрим линейную комбинацию любых двух решений этого уравнения то получим функцию, так же являющуюся решением этого уравнения и операции сложения и умножения на число для функций, являющихся решениями этого уравнения обладают всеми требуемыми свойствами.

С точки зрения квантовой механики линейные пространства представляют интерес потому, что как мы увидим, основным понятием, используемым при описании квантовых систем, является понятие состояния. Состояние квантовой системы может быть описан с помощью комплекснозначной функции – амплитуды вероятности. Причем, множество функций, соответствующих всевозможным состояниям системы, как мы увидим, будет представлять собой линейное пространство.

Для анализа свойств элементов линейного пространства, большое значение имеет понятие линейной зависимости и линейной независимости. Какие либо k элементов некоторого линейного пространства (мы обозначим их через $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots + c_k \Psi_k$ с коэффициентами c_1, c_2, \dots, c_k , равна нулевому элементу этого пространства только в том случае, когда все коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_k равны нулю. Если же элементы $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ таковы, что возможно построить равную нулевому элементу линейную комбинацию так чтобы хотя бы один из коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_k был отличен от нуля, то элементы $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$ рассматриваемого пространства называются линейно зависимыми.

Если в линейном пространстве можно выделить такую конечную или бесконечную совокупность линейно - независимых элементов $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k, \dots$, таких, что любой элемент этого пространства представляется в виде их линейной комбинации, то эту совокупность элементов называют базисом рассматриваемого линейного пространства. Причем если базис содержит конечное число элементов рассматриваемого линейного пространства то говорят что это пространство конечно мерно. В частности, если в линейном пространстве можно указать такие n элементов $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$, что любой элемент этого пространства может быть представлен в виде их линейной комбинации, то говорят что это пространство n -мерно. В частно-

сти плоскость можно представить как двумерное линейное пространство обычных векторов. Множество многочленов от одной переменной степени не выше чем n - это $n + 1$ - мерное линейное пространство, базисом которого является множество многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Приведем примеры бесконечномерных линейных пространств. Рассмотрим множество функций $f(x)$, представимых своим рядом Тейлора в окрестности точки 0 :

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(0) x^n.$$

Напомним, что в функции говорят, что она представляется своим рядом Тейлора в окрестности некоторой точки, если можно указать такой интервал содержащий эту точку, что в любой точке этого интервала значение функции равно сумме ее ряда Тейлора. Из приведенной выше записи разложения Тейлора для функции $f(x)$ видно, что ее можно рассматривать как “многочлен бесконечной степени”. Поэтому пространство таких функций бесконечномерно, а базисом в этом пространстве могут являться функции $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Другой пример бесконечномерного линейного пространства дают периодические функции с некоторым заданным периодом. Обозначим этот период через l . Легко проверить, что сумма двух периодических с периодом l функций будет снова периодической функцией с тем же периодом. Очевидно что и произведение периодической с периодом l функции на любое число опять даст нам периодическую с тем же периодом функцию. Т.э. операции сложения и умножения на число, производимые над периодическими с данным периодом функциями не выводят нас за пределы множества периодических с этим периодом функций. Поэтому множество функций, периодических с периодом l образует линейное пространство. Как известно, любая периодическая функция с периодом l может быть представлена рядом Фурье. Если обозначить рассматриваемую периодическую функцию через $f(x)$, то как известно, ее разложение Фурье имеет вид:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} x\right),$$

где a_n и b_n - некоторые числа, значения которых известным образом определяются функцией $f(x)$, в которой идет речь. Эти числа называются коэффициентами Фурье этой функции. Как

видно из приведенного разложения любая функция, периодическая с периодом l может быть представлена в виде линейной комбинации функций

$1, \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right), \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right), n = 1, 2, \dots, \infty$, или в виде линейной комбинации функций $\exp\left(i \frac{2\pi n}{l} x\right), n = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$. Обь приведенные системы функций могут

рассматриваться в качестве базиса в линейном пространстве периодических функций. Как видим, количество элементов этого базиса бесконечно. Т.э. линейное пространство функций, периодических с периодом l является бесконечномерным линейным пространством.

Линейные операторы на линейных пространствах.

Пусть имеются два линейных пространства A и B , если каждому элементу пространства A по какому-либо правилу однозначно сопоставляется некоторый элемент пространства B , то говорят что задан оператор, отображающий элементы множества A на элементы мно-

жества B . Если этот оператор обозначить \mathcal{E} , то тот факт, что элемент g множества B , сопоставляется оператором \mathcal{E} элементу f множества A принято обозначать следующим образом $g = \mathcal{E}(f)$. Множество A принято называть областью определения оператора, а множество B - его областью значений. Заметим, что область определения и область значений оператора не обязательно должны быть различны. Часто рассматриваются операторы, которые одним элементам некоторого множества сопоставляют другие элементы того же множества. В дальнейшем мы будем иметь ввиду именно такие операторы.

В качестве примера рассмотрим множество аналитических комплекснозначных функций, заданных на действительной прямой. Обозначим произвольную такую функцию $\Psi(x)$. Если мы рассмотрим соответствие при котором каждой из этих функций сопоставляется, вообще говоря, другая функция, получающаяся дифференцированием исходной функции $\Psi(x)$

по x , то тем самым будет задан оператор $\mathcal{E} = \frac{d}{dx}$. Другой пример оператора мы получим, если

каждой функции $\Psi(x)$ сопоставим другую функцию, которая определяется таким образом, что она дороговому числу x сопоставляет комплексное число, получаемое умножением числа которое числу x сопоставляет функция $\Psi(x)$ на само число x . Это соответствие можно рассматривать как оператор \mathcal{X} , действующий по правилу $\mathcal{X}(\Psi(x)) = x\Psi(x)$.

Оператор \mathcal{E} называется линейным, если для любых двух элементов Ψ и Φ линейного пространства, на котором он определен, и для любых двух чисел a и b , он обладает свойством

$$\mathcal{E}(a\Psi + b\Phi) = a\mathcal{E}(\Psi) + b\mathcal{E}(\Phi).$$

Задача 1

Докажите, что оператор $\frac{d}{dx}$ и оператор \mathcal{X} , введенный выше являются линейными.

Приведите свой пример оператора, который был бы линейным.

Если в линейном пространстве, на котором определен линейный оператор \mathcal{E} , выделен базис $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ (конечный или бесконечный), то произвольный элемент Ψ этого пространства представляется в виде линейной комбинации элементов этого базиса

$\Psi = \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i$. При этом предполагается, что верхний предел суммирования n в этом выра-

жении может быть равен как какому-либо конечному числу, так и бесконечности в зависимости от того конечномерное или бесконечномерное пространство рассматривается. Тогда действие некоторого линейного оператора \mathcal{E} на произвольный элемент Ψ этого пространства с помощью определения линейного оператора можно представить в виде:

$$\mathcal{E}(\Psi) = \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^n c_i \Psi_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{E}(\Psi_i).$$

Из приведенного выражения видно важное свойство линейных операторов, определенных на линейных пространствах. Это свойство состоит в том, что для того, чтобы определить действие линейного оператора на любой элемент этого линейного пространства достаточно

определить его действие на базисные элементы. Действительно, из приведенного равенства видно, что если мы будем знать результат действия линейного оператора \hat{E} на каждый базисный элемент Ψ_i того линейного пространства, на котором определен оператор \hat{E} (т.е. будем знать $\hat{E}(\Psi_i)$), то составляя линейную комбинацию $\sum_{i=1}^n c_i \hat{E}(\Psi_i)$ мы получим результат действия этого оператора на любой элемент рассматриваемого линейного пространства. При этом, т.к. мы оговорили что рассматриваем операторы в которых область определения и область значения – это одно и то же линейное пространство, то $\hat{E}(\Psi_i)$ - это некоторый элемент того же линейного пространства, для которого элементы Ψ_i составляют базис. Поэтому элемент $\hat{E}(\Psi_i)$ может быть разложен по тому же базису:

$$\hat{E}(\Psi_i) = \sum_{k=1}^n L_{ki} \Psi_k ,$$

где через L_{ki} обозначены коэффициенты разложения. Если эти коэффициенты при любых возможных значениях индексов k, i известны, то действие линейного оператора \hat{E} на все базисные элементы Ψ_i определено. А значит, как это обсуждалось выше, тогда определено и действие этого линейного оператора на любой элемент линейного пространства, являющегося областью определения этого оператора. Если коэффициенты L_{ki} представит в виде матрицы (конечной или бесконечной в зависимости от размерности пространства), то можно сказать что линейный оператор \hat{E} на рассматриваемом линейном пространстве полностью определяется этой матрицей. Поэтому матрицу с элементами L_{ki} мы будем обозначать так же как и оператор - \hat{E} .

Произведение операторов.

Пусть имеются два оператора \hat{E} и \hat{M} , такие что область значений оператора \hat{E} совпадает с областью определения оператора \hat{M} . Тогда можно определить оператор, который называется произведением этих операторов $\hat{M}\hat{E}$ (именно в таком порядке!). Этот оператор определяется как результат последовательного применения к элементу Ψ из области определения оператора \hat{E} сначала самого оператора \hat{E} , а затем к результату действия \hat{E} на Ψ уже оператора \hat{M} : $\hat{M}\hat{E}(\Psi) = \hat{M}(\hat{E}(\Psi))$.

Если, кроме того область значений оператора \hat{M} совпадает с областью определения оператора \hat{E} то кроме произведения $\hat{M}\hat{E}$ может быть определено произведение $\hat{E}\hat{M}$: $\hat{E}\hat{M}(\Psi) = \hat{E}(\hat{M}(\Psi))$. При этом принципиальным отличием перемножения операторов от перемножения чисел является то что перемножение операторов некоммутативно – изменение порядка сомножителей, вообще говоря, изменяет значение произведения. Как мы увидим эта некоммутативность имеет решающее значение в квантовой механике при описании “странного” поведения микрочастиц.

Задача 2.

Докажите, что оператор $\frac{d}{dx}$ и оператор \mathcal{E} , введенный выше не коммутируют, т.е.

результат их последовательного применения к произвольной аналитической функции $\Psi(x)$ в разном порядке будет разным.

Пусть имеется два оператора \mathcal{E} и \mathcal{M} , таких что возможно определить как произведение $\mathcal{E}\mathcal{M}$ так и произведение $\mathcal{M}\mathcal{E}$, тогда по ним можно определить третий оператор, называемый коммутатором \mathcal{E} и \mathcal{M} и обозначаемый $[\mathcal{E}, \mathcal{M}]$. Он определяется следующим образом. Для произвольного элемента Ψ :

$$[\mathcal{E}, \mathcal{M}](\Psi) = \mathcal{E}\mathcal{M}(\Psi) - \mathcal{M}\mathcal{E}(\Psi).$$

Оператор, который дороговому элементу своей области определения сопоставляет этот же элемент называется единичным. Он обозначается \mathcal{E} и определяется соотношением $\mathcal{E}(\Psi) = \Psi$.

Задача 3.

а) Найдите коммутатор $\left[\mathcal{E}, -i \frac{d}{dx} \right]$.

б) Пусть имеются операторы

$$\mathcal{E}_x = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \mathcal{E}_y = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \mathcal{E}_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Найдите их всевозможные попарные коммутаторы, и покажите что коммутатор любых двух из этих операторов пропорционален третьему.

в) Докажите тождество, состоящее в том, что для любых трех операторов \mathcal{A} , \mathcal{B} и \mathcal{C} имеет место соотношение:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{C}] = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]\mathcal{C} + \mathcal{B}[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$$

В качестве удобного вспомогательного средства к решению задачи 3б) рассмотрим трехмерный символ Леви-Чивита.

Трехмерный символ Леви - Чивита

Трехмерным символом Леви-Чивита называется совокупность 27 чисел которые принято обозначать следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{E}_{xxx} & \mathcal{E}_{xyx} & \mathcal{E}_{xzx} & \mathcal{E}_{yxx} & \mathcal{E}_{yux} & \mathcal{E}_{yzx} & \mathcal{E}_{zxx} & \mathcal{E}_{zyx} & \mathcal{E}_{zzx} \\ \mathcal{E}_{xxy} & \mathcal{E}_{xyy} & \mathcal{E}_{xzy} & \mathcal{E}_{yxx} & \mathcal{E}_{yuy} & \mathcal{E}_{yzy} & \mathcal{E}_{zxy} & \mathcal{E}_{zyy} & \mathcal{E}_{zzy} \\ \mathcal{E}_{xxz} & \mathcal{E}_{xyz} & \mathcal{E}_{xzz} & \mathcal{E}_{yxz} & \mathcal{E}_{yyz} & \mathcal{E}_{yzz} & \mathcal{E}_{zxx} & \mathcal{E}_{zyz} & \mathcal{E}_{zzz} \end{array}$$

и которые принято называть компонентами символа Леви-Чивита. Для значений компонент принято следующее правило. Если хотя бы два из трех индексов в компоненты совпадают она полагается равной нулю. Если же все три индекса различны, то значение компоненты равно либо +1 либо -1. При этом, нужно подсчитать сколько перестановок соседних индексов данной компоненты нужно сделать, чтобы порядок следования индексов оказался x, y, z . Обратим внимание на то что, что при подсчете числа перестановок, на каждом шаге этих перестановок, переставят можно только соседние, т.е. рядом стоящие индексы. Например, если мы имеем расстановку индексов zyx , то для того чтобы привести ее к расстановке xyz можно сначала

переставит рядом стоящие индексы y и x . Тогда получим zxy . Теперь переставим рядом стоящие индексы x и z , при этом получим xzy . После этого остается переставит местами y и z , после чего получаем нужную расстановку xyz . Как видим для приведения заданной расстановки к исходной понадобилось сделать три перестановки соседних индексов. Если число перестановок индексов компоненты, подсчитанное указанным способом оказывается равным четному числу, то компонента полагается равной $+1$, если же оно оказывается нечетным, то компонента равна -1 . Исходя из этого правила получаем следующие значения компонент символа Леви-Чивита:

$$\varepsilon_{xxx} = 0; \varepsilon_{xxy} = 0; \varepsilon_{xxz} = 0; \varepsilon_{xyx} = 0; \varepsilon_{xyy} = 0; \varepsilon_{xyz} = 1(0);$$

$$\varepsilon_{xzx} = 0; \varepsilon_{xzy} = -1(y \leftrightarrow z); \varepsilon_{xzz} = 0; \varepsilon_{yxx} = 0; \varepsilon_{yxy} = 0; \varepsilon_{yxz} = -1(1, y \leftrightarrow x);$$

$$\varepsilon_{yyx} = 0; \varepsilon_{yyy} = 0; \varepsilon_{yyz} = 0; \varepsilon_{yzx} = 1(2, x \leftrightarrow z, x \leftrightarrow y); \varepsilon_{yzy} = 0; \varepsilon_{yzz} = 0;$$

$$\varepsilon_{zxx} = 0; \varepsilon_{zxy} = 1(2, z \leftrightarrow x, z \leftrightarrow y); \varepsilon_{zxx} = 0; \varepsilon_{zyx} = -1(3, z \leftrightarrow y, z \leftrightarrow x, x \leftrightarrow y); \varepsilon_{zyz} = 0;$$

$$\varepsilon_{zzx} = 0; \varepsilon_{zzy} = 0; \varepsilon_{zzz} = 0.$$

В скобках около компонент символа Леви-Чивита, отличных от нуля указан количество перестановок соседних элементов, необходимых для приведения заданной расстановки к исходной, а так же какие из перестановок при этом нужно сделать.

Трехмерный символ Леви-Чивита обладает важным свойством, часто используемым в расчетах. Возьмем произведение двух компонент $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и $\varepsilon_{\alpha\mu\nu}$. Как видим, мы должны выбрать такие компоненты, в которых первый индекс совпадает, а остальные индексы принимают какие угодно значения. Выберем теперь какие-то значения индексов β, γ, μ, ν , зафиксируем

их и просуммируем по всем трем значениям α . Т.э. рассчитаем сумму $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu}$ при

заданных значениях индексов β, γ, μ, ν .

Трехмерный символ Леви-Чивита обладает важным свойством, часто используемым в расчетах. Возьмем произведение двух компонент $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и $\varepsilon_{\alpha\mu\nu}$. Как видим, мы должны выбрать такие компоненты, в которых первый индекс совпадает, а остальные индексы принимают какие угодно значения. Выберем теперь какие-то значения индексов β, γ, μ, ν , зафиксируем их и

просуммируем по всем трем значениям α . Т.э. рассчитаем сумму $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu}$ при задан-

ных значениях индексов β, γ, μ, ν . Покажем, что при любых значениях зафиксированных индексов β, γ, μ, ν выполняется равенство:

$$\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu},$$

где через $\delta_{\alpha\beta}$ обозначен символ Кронекера. Символом Кронекера называется совокупность девяти чисел

$$\begin{array}{ccc} \delta_{xx} & \delta_{xy} & \delta_{xz} \\ \delta_{yx} & \delta_{yy} & \delta_{yz} \\ \delta_{zx} & \delta_{zy} & \delta_{zz}, \end{array}$$

значения которых определяются следующим правилом. Они равны нулю если значения индексов α и β различны, и равны единице, если значения этих индексов совпадают:

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= 1 & \delta_{xy} &= 0 & \delta_{xz} &= 0 \\ \delta_{yx} &= 0 & \delta_{yy} &= 1 & \delta_{yz} &= 0 \\ \delta_{zx} &= 0 & \delta_{zy} &= 0 & \delta_{zz} &= 1. \end{aligned}$$

Докажем теперь соотношение $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}$. Для доказательства придется рассмотреть несколько случаев.

Предположим, что значения индексов β, γ, μ, ν мы выбрали таким образом, что, например, $\beta = \gamma$. Т.э. эти два индекса принимают одинаковые значения. Тогда в силу рассмотренного выше определения символа Леви-Чивита все три слагаемых в сумме $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu}$

обращаются в ноль за счет того, что при любом значении α , в случае $\beta = \gamma$ будет $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Т.э. при $\beta = \gamma$ левая часть равенства $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}$ об-

ращается в ноль. Но в этом случае и правая часть равенства обратится в ноль, т.к. мы всюду в ней можем заменить γ на β и получим:

$$\delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\beta\mu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\beta\mu} \delta_{\beta\nu} = 0.$$

Таким образом, т.к. при $\beta = \gamma$ обе части равенства равны между нулю, то они равны между собой и, тем самым, мы доказали, что требуемое равенство выполняется для случая $\beta = \gamma$.

Совершенно аналогично можно доказать, что это равенство выполняется при $\mu = \nu$.

Рассмотрим теперь случай $\beta \neq \gamma, \mu \neq \nu$. Т.к. $\beta \neq \gamma$, то из трех значений которые пробегает индекс α в сумме $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu}$, только одно не совпадет ни с β , ни с γ . Обозначим это значение $\bar{\alpha}$. Тогда в сумме $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu}$ может быть отлично от нуля только

одно слагаемое: $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \varepsilon_{\bar{\alpha}\mu\nu}$. При этом возможны два варианта: либо $\bar{\alpha}$ совпадает с μ или с ν и тогда рассматриваемая сумма равна нулю, либо оно не совпадает ни с μ ни с ν

Рассмотрим сначала первый вариант. Если, например, $\bar{\alpha}$ совпадает с μ , то это значит что $\mu \neq \gamma$ и $\mu \neq \beta$, т.к. через $\bar{\alpha}$ мы обозначили как раз то значение индекса α , которое не

совпадает ни с γ ни с β . Но т.к. $\bar{\alpha} = \mu$, то $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \varepsilon_{\bar{\alpha}\mu\nu} = \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \cdot 0 = 0$. А

т.к. $\mu \neq \gamma$ и $\mu \neq \beta$, то $\delta_{\mu\gamma} = \delta_{\mu\beta} = 0$. Поэтому $\delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu} = 0 \cdot \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \cdot 0$. И снова обе части равенства

$$\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}$$

оказались равными нулю, и, следовательно, равными между собой. Аналогично доказывается справедливость этого равенства в случае $\bar{\alpha} = \nu$.

Рассмотрим теперь самый важный случай $\bar{\alpha} \neq \mu, \bar{\alpha} \neq \nu$. Но, добавляя к этому неравенства $\bar{\alpha} \neq \beta, \bar{\alpha} \neq \gamma$ и еще $\beta \neq \gamma, \mu \neq \nu$, которые выражают условия для единственного случая, который нам осталось рассмотреть, в так же учитывая, что каждый индекс может принимать всего три значения, мы приходим к выводу, что в рассматриваемом случае либо $\beta = \mu, \gamma = \nu$, либо $\beta = \nu, \gamma = \mu$. Но в случае $\beta = \mu, \gamma = \nu$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} &= \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \varepsilon_{\bar{\alpha}\mu\nu} = \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} = (\varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma})^2 = 1, \\ \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu} &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом и в этом случае значения обеих частей равенства совпали.

В случае $\beta = \nu, \gamma = \mu$:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} &= \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \varepsilon_{\bar{\alpha}\mu\nu} = \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \varepsilon_{\bar{\alpha}\gamma\beta} = -\varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma} = -(\varepsilon_{\bar{\alpha}\beta\gamma})^2 = -1, \\ \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu} &= 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

После того, как мы рассмотрели все возможности и показали, что значения правой и левой частей равенства $\sum_{\alpha=x}^z \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}$ во всех этих случаях совпадают, это равенство можно считать доказанным.

Линейные пространства со скалярным произведением.

Для элементов линейного пространства может быть введен скалярное произведение, подобно поэтому как это делается для векторов в обычном трехмерном пространстве. Дадим соответствующее определение.

Пусть имеется некоторое линейное пространство и пусть задан соответствие, которое любой паре элементов этого пространства Ψ и Φ сопоставляет вообще говоря комплексное число (обозначаемое обычно $\langle \Psi | \Phi \rangle$), таким образом что выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Psi \rangle &= (\langle \Psi | \Phi \rangle)^* \\ \langle \Psi_1 + \Psi_2 | \Phi \rangle &= \langle \Psi_1 | \Phi \rangle + \langle \Psi_2 | \Phi \rangle, \\ \langle \Psi | \Phi_1 + \Phi_2 \rangle &= \langle \Psi | \Phi_1 \rangle + \langle \Psi | \Phi_2 \rangle, \\ \langle \Psi | z\Phi \rangle &= z\langle \Psi | \Phi \rangle, \langle z\Psi | \Phi \rangle = z^* \langle \Psi | \Phi \rangle. \end{aligned}$$

тогда говорят, что на рассматриваемом линейном пространстве определено скалярное произведение. При этом число $\langle \Psi | \Phi \rangle$, сопоставляемое паре элементов Ψ и Φ называют скалярным произведением этих элементов.

Например, скалярное произведение на линейном пространстве комплекснозначных аналитических на действительной оси функций может быть введен следующим образом:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \Phi(x) dx.$$

именно такое определение скалярного произведения применяется в квантовой механике.

Пусть на некотором линейном пространстве задан оператор \hat{E} , а Ψ и Φ - элементы этого линейного пространства. Тогда число, равное скалярному произведению элемента Ψ на элемент, сопоставляемый оператором \hat{E} элементу Φ называется матричным элементом оператора \hat{E} между элементами линейного пространства Ψ и Φ . Матричный элемент обозначается $\langle \Psi | \hat{E} \Phi \rangle$. Иногда матричный элемент обозначается также $\langle \Psi | \hat{E} | \Phi \rangle$. Как мы увидим в дальнейшем, матричные элементы операторов играют важную роль в квантовой механике, т.к. через них выражаются непосредственно наблюдаемые в эксперименте величины.

Пусть на некотором линейном пространстве задан линейный оператор \hat{E} и пусть найдется такой оператор \hat{E}^\dagger , что для любых двух элементов Ψ и Φ рассматриваемого линейного пространства выполняется равенство

$$\langle \Psi | \hat{E} \Phi \rangle = \langle \hat{E}^\dagger \Psi | \Phi \rangle,$$

или, что то же самое $\langle \Psi | \hat{E} | \Phi \rangle = \langle \Phi | \hat{E}^\dagger | \Psi \rangle^*$. Тогда такой оператор \hat{E}^\dagger называется эрмитово-сопряженным оператору \hat{E} . Для наиболее часто используемого в квантовой механике скалярного произведения определение эрмитово-сопряженного оператора принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) (\hat{E} \Phi(x)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{E}^\dagger \Psi(x))^* \Phi(x) dx.$$

Задача 4.

Пусть функции $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ заданы на некотором промежутке $[a, b]$, (где a и b могут быть как конечными так и бесконечными) и обладают тем свойством, что их значения обращаются в нуль на концах этого промежутка. Очевидно множество таких функций образует линейное пространство. Пусть на этом пространстве задан скалярное произведение по правилу

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_a^b \Psi^*(x) \Phi(x) dx.$$

Найдите на этом пространстве операторы эрмитово-сопряженные операторам а) $\frac{d}{dx}$, б)

в) $\frac{d}{dx}$, в) $\frac{d^2}{dx^2}$. Будут ли найденные операторы эрмитово-сопряженными данным операторам если вот функций не требуют обращения в нуль на концах промежутка?

Задача 5.

Докажите, что для произвольного оператора \hat{E} , для которого существует эрмитово-сопряженный оператор \hat{E}^\dagger выполняются свойства

$$a) (\alpha \mathcal{E})^+ = \alpha^* \mathcal{E}^+; b) (\mathcal{E}^+)^+ = \mathcal{E},$$

а для любых двух операторов \mathcal{E} и \mathcal{M} , для которых определено произведение имеет место тождество в) $(\mathcal{E}\mathcal{M})^+ = \mathcal{M}^+ \mathcal{E}^+$.

Собственные функции и собственные значения операторов.

Оператор, совпадающий со своим эрмитово-сопряженным называется самосопряженным или эрмитовым. Обратите внимание на то, что два из трех операторов рассмотренных в задаче 4 являются самосопряженными.

Два элемента Ψ и Φ некоторого линейного пространства называются линейно независимыми в том случае, если равенство $a\Psi + b\Phi = 0$, где a и b - некоторые числа возможно только если и a и b одновременно равны нулю. В противном случае, если такое равенство возможно когда хотябы одно из чисел a или b (или оба одновременно) не равно нулю элементы Ψ и Φ называют линейно зависимыми. Заметим, что в случае, когда два элемента линейного пространства линейно зависимы между собой один из их может быть представлен в виде произведения второго на некоторую константу. Действительно, пусть $a\Psi + b\Phi = 0$, например a не равно нулю. Тогда обе части равенства можно поделить на a . В результате получим

$$\Psi + \frac{b}{a}\Phi = 0 \text{ и } \Psi = -\frac{b}{a}\Phi$$

Обозначая константу $(-\frac{b}{a})$ через λ получим $\Psi = \lambda\Phi$.

Если мы некоторым линейным оператором \mathcal{E} подействуем на ненулевой элемент линейного пространства Ψ , то вообще говоря мы получим в результате какой-либо другой элемент этого линейного пространства Φ линейно независимый вот Ψ . Однако для заданного оператора \mathcal{E} может найтись такой ненулевой элемент Ψ , что выполнится равенство $\mathcal{E}(\Psi) = \lambda\Psi$, где λ - некоторое число. В этом случае говорят что этот элемент Ψ является собственным вектором оператора \mathcal{E} , а число λ является собственным значением этого оператора, соответствующим собственному вектору Ψ . Т.к. чаще всего в квантовой механике приходится иметь дело с линейными пространствами, элементами которых являются функции, то вместо термина собственный вектор часто используют термин собственная функция оператора.

Задача 6.

Найдите все собственные функции и соответствующие им собственные значения для оператора, определенного в пункте в) задачи 4. Найдите скалярное произведение собственных функций соответствующих двум любым разным собственным значениям этого оператора.

Задача 7.

Докажите, что если \hat{A} -линейный оператор, а $\Psi(x)$ - его собственная функция, то для произвольного комплексного числа z функция $z\Psi(x)$ так же будет собственной функцией оператора \hat{A} , причем соответствующей поэтому же самому собственному значению что и исходная функция $\Psi(x)$. Будут ли функции $\Psi(x)$ и $z\Psi(x)$ линейно независимыми?

Как видно из решения этой задачи один и поэтому же собственному значению оператора могут соответствовать разные собственные функции. Если собственное значение оператора таково, что любые две собственные функции, соответствующие этому собственному значению линейно зависимы, то такое собственное значение называют невырожденным. Если же существуют линейно независимые собственные функции для одного и того же собственного значения то такое собственное значение называют вырожденным. В дальнейшем говоря в собственных функциях и собственных значениях операторов мы будем предполагать что все собственные значения невырождены.

Задача 8.

Докажите, что если два линейных оператора \hat{A} и \hat{B} , все собственные значения которых невырождены, коммутируют, собственные функции одного из них являются собственными функциями второго. Т.э. два коммутирующих оператора имеют общую систему собственных функций.

Пусть имеется некоторое линейное пространство, на котором определено скалярное произведение. Любые два элемента этого пространства скалярное произведение которых равно нулю называются взаимно ортогональными.

Задача 9.

Докажите что если имеется система функций $\Psi_n(x), n = 1, 2, 3, \dots$ таких что любые две из них взаимно ортогональны, то все эти функции обязательно линейно независимы.

Задача 10.

Докажите, что все собственные значения дорогого самосопряженного оператора действительны и что собственные функции, соответствующие двум разным собственным значениям такого оператора всегда ортогональны.

Пусть имеется линейное пространство, на котором задан скалярное произведение, удовлетворяющее перечисленным выше требованиям. Пусть Ψ - элемент этого пространства. Арифметический квадратный корень из скалярного произведения этого элемента на себя называется его нормой. Норма элемента обозначается так $\|\Psi\|$. Согласно определению

$$\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}.$$

Задача 11.

Воспользовавшись свойствами скалярного произведения, докажите что скалярное произведение дорогого элемента линейного пространства на себя неотрицательно, так что корень в определении нормы всегда равен действительному числу.

Задача 12.

Пусть \hat{A} - линейный оператор, а $\Psi_n, n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ его линейно независимые собственные функции. Докажите что эти функции всегда могут быть выбраны такими, чтобы их нормы были равны 1. (Такую систему функций мы будем называть нормированной. При этом говоря в дальнейшем в собственных функциях оператора мы будем предполагать что они выбраны нормированными на 1).

Пусть у нас имеется линейное пространство. Пусть так же имеется совокупность элементов этого пространства $\Psi_n, n = 1, 2, 3, \dots, \infty$, (число элементов в этой совокупности вообще говоря может быть бесконечным) такая, что любой элемент этого линейного пространства Ψ может быть представлен в виде линейной комбинации Ψ_n :

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n,$$

тогда говорят, что эти элементы образуют полную систему в этом пространстве. Если все Ψ_n нормированы на единицу, то говорят что данная система не только полна но и нормирована.

Если все они еще и попарно ортогональны друг другу то такую систему называют полной ортонормированной.

Пусть на некотором линейном пространстве задан самосопряженный оператор \hat{A} , тогда если $\Psi_n, n = 1, 2, 3, \dots$ -его собственные функции, то можно показать что система этих функций полна в этом пространстве. Т.к. мы ранее доказали, что собственные функции самосопряженного оператора ортогональны и могут быть нормированы, то можно сделать следующее утверждение. Собственные функции линейного самосопряженного оператора образуют полную ортонормированную систему функций. Вторыми словами, совокупность собственных функций данного самосопряженного оператора образует полную систему в том пространстве в котором задан этот оператор. Это означает что любая функция из линейного пространства функций на котором задан некоторый линейный самосопряженный оператор может быть представлена как сумма ряда по собственным функциям этого оператора.

Задача 13.

Докажите утверждение, обратное поэтому, которое формулировалось в задаче 8. А именно, если в двух линейных самосопряженных операторов совпадают системы собственных функций, т.е. собственные функции одного являются одновременно собственными функциями второго и наоборот, то такие операторы коммутируют.

Задача 14.

Пусть Ψ - некоторый вектор линейного пространства. Пусть норма этого вектора равна единице. Пусть $\Psi_n, n = 1, 2, 3, \dots$ -полная ортонормированная система собственных функций некоторого самосопряженного оператора, а c_n - коэффициенты разложения Ψ по Ψ_n :

$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n$. Докажите что в этом случае $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* c_n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$. Докажите так же что $c_k = \langle \Psi_k | \Psi \rangle$.

Пусть n - целое положительное число, n - тот степенью оператора \hat{A} называется оператор действие которого на любую функцию Ψ состоит в последовательном n -кратном применении оператора \hat{A} : $A^n(\Psi) = \underbrace{\hat{A} \hat{A} \dots \hat{A}}_{n \text{ раз}}(\Psi)$.

Задача 15.

Пусть даны два линейных оператора \hat{A} и \hat{B} , таких что $[\hat{A}, \hat{B}] = c \hat{I}$. Докажите что в этом случае $[\hat{A}^n, \hat{B}] = n \hat{A}^{n-1} [\hat{A}, \hat{B}]$.

Определив степень оператора мы можем далее определить и функцию вот оператора. Действительно, пусть $f(x)$ - некоторая функция, представимая в окрестности точки $x = 0$ своим рядом

Тейлора: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$

Тогда т.к. мы уже знаем что означает возведение оператора в степень по данному оператору \hat{A} мы можем определить функцию $f(\hat{A})$. А именно функцией оператора \hat{A} будет называться оператор, определяемый через коэффициенты рядв Тейлора для функции $f(x)$ следующим образом:

$$f(\hat{A}) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \hat{A} + \frac{f''(0)}{2!} \hat{A}^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{A}^n + \dots$$

Например, как известно функция $\exp(x)$ вот произвольного комплексного числа x определяется рядом Тейлора: $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Тогда мы можем определить экспоненту вот оператора. Под экспонентой вот оператора понимается следующий оператор

$$\exp(\hat{A}) = \hat{I} + \frac{1}{1!} \hat{A} + \frac{1}{2!} \hat{A}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \hat{A}^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{A}^k.$$

(Здесь \hat{I} - единичный оператор).

Задача 16.

Докажите что если Ψ - собственная функция оператора \hat{A} , соответствующая собственному значению a , то она будет и собственной функцией оператора $\exp(\hat{A})$. Чему равно собственное значение соответствующее этой собственной функции.

Задача 17.

Докажите, что если t - число и если рассмотреть операторнозначную функцию вот этого числа $\hat{f}(t) = \exp(t\hat{A})$, где \hat{A} - некоторый оператор, то для такой операторнозначной функции имеет место соотношение дифференцирования, аналогичное соотношению дифференцирования для обычной экспоненты:

$$\frac{d}{dt}(\exp(t\hat{A})) = \hat{A} \exp(t\hat{A}) = \exp(t\hat{A}) \hat{A}.$$

Задача 18.

Пусть оператор \hat{X} определяется следующим образом: $\hat{X}(\Psi(x)) = x\Psi(x)$. Пусть $U(x)$ - произвольная функция, представимая своим рядом Тейлора. Докажите что оператор $U(\hat{X})$ действует на произвольную функцию $\Psi(x)$ следующим образом:

$$U(\hat{X})(\Psi(x)) = U(x)\Psi(x).$$

Если для некоторого оператора \hat{A} найдется такой оператор \hat{A}^{-1} , что $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}$, где \hat{I} - единичный оператор, то оператор \hat{A}^{-1} называется обратным оператору \hat{A} .

Задача 19.

Докажите что если операторы \hat{A} и \hat{B} имеют обратные операторы, то оператор $\hat{A}\hat{B}$ также имеет обратный оператор причем $(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$.

Оператор для которого эрмитово-сопряженный оператор совпадает с обратным называется унитарным. Т.э. если \hat{U} - унитарный оператор, то для него должно выполняться равенство: $\hat{U}^+\hat{U} = \hat{I}$.

Задача 21.

Докажите что унитарный оператор сохраняет скалярное произведение. Т.э., что если \hat{U} - унитарный оператор, а Ψ и Φ - любые два элемента линейного пространства и $\Psi' = \hat{U}(\Psi)$, $\Phi' = \hat{U}(\Phi)$ - элементы линейного пространства, сопоставляемые элементам Ψ и Φ , то $\langle \Psi' | \Phi' \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$.

Задача 22.

Пусть $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ какие-нибудь n функций, в которых известно что они линейно независимы, но не ортогональны друг другу. Докажите, что из их всегда можно составить n таких линейных комбинаций:

$$\Phi_1 = c_{11}\Psi_1 + c_{12}\Psi_2 + \dots + c_{1n}\Psi_n, \dots, \Phi_n = c_{n1}\Psi_1 + c_{n2}\Psi_2 + \dots + c_{nn}\Psi_n$$

что функции $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ будут ортогональными друг другу. Как следствие этого утверждения докажите, что если линейный самосопряженный оператор обладает вырожденными соб-

ственными значениями, то собственные функции соответствующие каждому вырожденному собственному значению всегда могут быть выбраны ортогональными друг другу.

Для решения дальнейших задач нам необходимо рассмотреть частный случай когда базис пространства на котором задан оператор состоит из конечного числа линейно независимых функций $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$, которые, в силу результата предыдущей задачи мы можем считать ортогональными. Это означает что произвольный элемент этого пространства может быть представ-

лен $\Psi = \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k$. При этом числа $c_k, k = 1, 2, \dots, n$ естественно назвать координатами этого эле-

мента т.к. упорядоченный набор этих чисел однозначно определяет элемент Ψ подобно поэтому как координаты в обычном трехмерном пространстве однозначно определяют вектор. Эти

координаты принято изображать в виде столбца $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ и говорят что этот столбец представляет

состояние Ψ в выбранном базисе $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$

Задача 23

Найдите каким образом выражается скалярное произведение произвольных двух элементов Ψ и Φ рассматриваемого конечномерного пространства через их координаты. Пусть \hat{A} - некоторый линейный оператор. Пусть известны координаты некоторого элемента $\Psi : c_k, k = 1, 2, \dots, n$, покажите что координаты $b_l, l = 1, 2, \dots, n$ элемента $\hat{A}(\Psi)$ выражаются че-

рез координаты Ψ следующим образом: $b_l = \sum_k^n a_{lk} c_k$, где $a_{lk} = \langle \Psi_l | \Psi_k \rangle$. При этом числа

a_{lk} принято изображать в виде матрицы и говорят что эта матрица представляет оператор \hat{A} в выбранном базисе. Матрицу, представляющую оператор в данном базисе мы будем обозначать тем же символом что и сам оператор- \hat{A} .

Пусть имеется матрица \hat{A} . Матрица \hat{A}^T , строка которой с произвольным номером равна столбцу исходной матрицы \hat{A} с тем же номером называется транспонированной к матрице \hat{A} . Матрица элементы которой получаются из элементов матрицы \hat{A} применением операций транспонирования и затем комплексного сопряжения называется эрмитово сопряженной к матрице \hat{A} . Матрица, совпадающая со своей эрмитово-сопряженной называется самосопряженной. Матрица, для которой эрмитово-сопряженная матрица совпадает с обратной называется унитарной.

Задача 24.

Покажите что если оператор \hat{A} представляется некоторой матрицей, то эрмитово-сопряженный к нему оператор представляется матрицей эрмитово-сопряженной к той, которой представляется оператор \hat{A} . Покажите что самосопряженный оператор представляется самосопряженной матрицей. Покажите что унитарный оператор представляется унитарной матрицей.

Задача 25.

Пусть из функций ортогонального базиса $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ устраиваются линейные ком-

бинации $\tilde{\Psi}_l = \sum_{k=1}^n c_{lk} \Psi_k, l = 1, 2, \dots, n$, причем так чтобы и новые базисные функции $\tilde{\Psi}_l$ так же оказывались ортогональными. Покажите что для этого необходимо чтобы выполнялись усло-

вия $\sum_{l=1}^n c_{kl}^* c_{jl} = \delta_{kj}, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$, где δ_{kj} - символ Кронекера. Докажите обратное ут-

верждение: Если имеются любые числа c_{kj} , $k = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$, для которых выполнены условия:

$$\sum_{l=1}^n c_{kl}^* c_{jl} = \delta_{kj}, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n,$$

и $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ - ортогональный базис, то строя с помощью этих чисел новый базис

$$\tilde{\Psi}_l = \sum_{k=1}^n c_{lk} \Psi_k, l = 1, 2, \dots, n, \text{ мы снова получим ортогональный базис.}$$

Условие наличия общих собственных функций в двух операторах

Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} - два линейных самосопряженных оператора. Покажем, что если они не коммутируют, то в них не может быть общих собственных функций. Сначала докажем, что если имеется совокупность произвольного числа функций $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$ (это число может быть и бесконечным), таких что любые две разные функции из этого списка ортогональны друг другу, то такие функции обязательно линейно независимы. Для доказательства напомним, что две функции называются ортогональными если их скалярное произведение равно нулю. Т.э. для рассматриваемой совокупности функций имеем $\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Напомним так же,

что принятое нами определение скалярного произведения $\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(L) \Phi(L) dL$, где

L - переменная, в представлении которой заданы функции Ψ и Φ , а Ω - область изменения этой переменной. Если величина L - одномерная, как, например, энергия, то под Ω понимается некоторый числовой промежуток, а если она трехмерная, как например, координата или импульс, то Ω - это некоторая трехмерная область в соответствующем пространстве (координатном (x, y, z)) или импульсном (p_x, p_y, p_z)). При таком определении скалярного произведения, скалярное произведение не равной тождественно нулю функции $\Psi(L)$ на саму себя $\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Psi^*(L) \Psi(L) dL = \int_{\Omega} |\Psi(L)|^2 dL$ является положительной величиной.

Т.э. $\langle \Psi | \Psi \rangle$ - это обязательно действительное число, строго большее нуля. Составим теперь линейную комбинацию $\sum_i c_i \Psi_i$ попарно ортогональных между собой функций

$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$. Для доказательства линейной независимости этих функций мы должны доказать, что эта линейная комбинация будет равна нулю только при нулевых значениях коэффициентов c_i . Предположим, что справедливо равенство $\sum_i c_i \Psi_i = 0$. Умножим скалярно

объ часть этого равенства слева на одну из функций из списка $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$, номер которой обозначим через k . Тогда

$$\left\langle \Psi_k \left| \sum_i c_i \Psi_i \right. \right\rangle = \langle \Psi_k | 0 \rangle = 0.$$

Учитывая свойства скалярного произведения $\langle \Psi | \Phi_1 + \Phi_2 \rangle = \langle \Psi | \Phi_1 \rangle + \langle \Psi | \Phi_2 \rangle$ и $\langle \Psi | c\Phi \rangle = c\langle \Psi | \Phi \rangle$ получим:

$$\left\langle \Psi_k \left| \sum_i c_i \Psi_i \right. \right\rangle = \sum_i \langle \Psi_k | c_i \Psi_i \rangle = \sum_i c_i \langle \Psi_k | \Psi_i \rangle = 0.$$

Учитывая ортогональность рассматриваемой системы функций, т.е. свойство $\langle \Psi_k | \Psi_i \rangle = 0$ при $k \neq i$, можно увидеть, что в рассматриваемой сумме отлично от нуля только то слагаемое, для которого $i = k$. Но тогда $c_k \langle \Psi_k | \Psi_k \rangle = 0$. Учитывая что $\langle \Psi_k | \Psi_k \rangle > 0$, приходим к выводу, что равенство $c_k \langle \Psi_k | \Psi_k \rangle = 0$ может выполняться только если $c_k = 0$. Т.к. в качестве k можно выбрать любой номер функции из списка $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$, то из равенства $\sum_i c_i \Psi_i = 0$ будет следовать, что все коэффициенты $c_i = 0$. Это и означает, что все функции в этом списке линейно независимы.

Т.к. собственные функции самосопряженного оператора, соответствующие разным собственным значениям ортогональны друг другу, то они линейно независимы. Кроме того, напомним, что у оператора могут быть вырожденные собственные значения. Это такие собственные значения, которым соответствует несколько (как минимум две) линейно независимые собственные функции. Но эти собственные функции линейно независимы согласно определению вырожденного собственного значения.

Напомним, что совокупность собственных функций линейного самосопряженного оператора полна в области определения этого оператора. Это означает, что любую функцию из линейного пространства, на котором определен некоторый линейный самосопряженный оператор можно представить в виде некоторой линейной комбинации его собственных функций. Докажем, на основании этого свойства, что результат действия линейного самосопряженного оператора на любую функцию может быть равен нулю только и если эта функция равна нулю, или если эта функция является собственной функцией этого оператора, соответствующей собственному значению, равному нулю.

Пусть \mathcal{A} - линейный самосопряженный оператор, а Ψ - такая функция, что $\mathcal{A}(\Psi) = 0$. Воспользовавшись полнотой системы собственных функций линейного самосопряженного оператора \mathcal{A} представим Ψ в виде $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$, где Ψ_i - собственные функции оператора \mathcal{A} .

Обозначив через a_i соответствующие им собственные значения и воспользовавшись линейно-

стью оператора \mathcal{A} получим: $\mathcal{A}(\Psi) = \mathcal{A}\left(\sum_i c_i \Psi_i\right) = \sum_i c_i \mathcal{A}(\Psi_i) = \sum_i c_i a_i \Psi_i = 0$. В силу ортого-

нальности собственных функций линейного самосопряженного оператора \mathcal{A} , они линейно независимы. Но тогда равенство $\sum_i c_i a_i \Psi_i = 0$ возможно только если для всех значений i имеет

место равенство $c_i a_i = 0$. Если среди собственных значений оператора \mathcal{A} нет равного нулю

то все c_i равны нулю и функция $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$ для которой $\mathcal{A}(\Psi) = 0$ тождественно равна

нулю. Если же среди собственных значений a_i найдется равное нулю, то коэффициенты c_i при соответствующих ему собственным функциям могут быть отличны от нуля. Соответствующие нулевому собственному значению слагаемые дадут нулевой вклад в сумму $\sum_i c_i a_i \Psi_i$.

Все коэффициенты при ненулевых собственных значениях из равенства $\sum_i c_i a_i \Psi_i = 0$ с учетом

линейной независимости функций Ψ_i обратятся в нуль. Поэтому в сумме $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$ останутся только слагаемые, соответствующие нулевому собственному значению. Поэтому функция Ψ в этом случае будет собственной функцией соответствующей нулевому собственному значению.

Пусть теперь операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} линейные самосопряженные операторы, которые между собой не коммутируют. Представим их коммутатор в виде $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = i\mathcal{C}$, где в силу предположения в некоммутативности \mathcal{A} и \mathcal{B} , \mathcal{C} - некоторый оператор не равный нулю. Покажем что он самосопряженный:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}, \mathcal{B}] = i\mathcal{C} &\Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = i\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})^+ = (i\mathcal{C})^+ \Rightarrow \mathcal{B}^+ \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+ \mathcal{B}^+ = -i\mathcal{C}^+ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{B} = -i\mathcal{C}^+ \Rightarrow -[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = -i\mathcal{C}^+ \Rightarrow -i\mathcal{C} = -i\mathcal{C}^+ \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}^+. \end{aligned}$$

Предположим теперь что два некоммутирующих линейных самосопряженных оператора \mathcal{A} и \mathcal{B} имеют общую собственную функцию Ψ : $\mathcal{A}(\Psi) = a\Psi$, $\mathcal{B}(\Psi) = b\Psi$. Тогда $[\mathcal{A}, \mathcal{B}](\Psi) = ab\Psi - ba\Psi = 0$, т.к. b и a уже не операторы а числа. Но т.к. $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = i\mathcal{C}$, то $\mathcal{C}(\Psi) = 0$. Но если у оператора \mathcal{C} нет нулевого собственного значения то $\Psi \equiv 0$ и следовательно не может являться собственной функцией никакого оператора. Поэтому в случае отсутствия у оператора, являющегося коммутатором двух некоммутирующих линейных самосопряженных операторов нулевого собственного значения эти операторы не могут иметь ни одной общей собственной функции. Если же в коммутатора имеется собственное значение, равное нулю, то общими собственными функциями некоммутирующих операторов могут быть только такие функции, которые являются собственными функциями коммутатора, соответствующими нулевому собственному значению.

Преобразование амплитуды вероятности при переход вот одной инерциальной системы отсчета в другую

Модули амплитуд вероятности в одной и той же самой точке пространную, в один и тот же самый момент времени должны быть одинаковые: $|\Psi(t, \vec{r})| = |\Psi'(t, \vec{r}')|$. Поэтому:

$$\begin{aligned} \Psi'(t, \vec{r}') &= |\Psi'(t, \vec{r}')| \exp(i \arg(\Psi'(t, \vec{r}')))) = |\Psi(t, \vec{r})| \exp(i \arg(\Psi'(t, \vec{r}')))) = \\ &= |\Psi(t, \vec{r})| \exp(i \arg(\Psi(t, \vec{r}))) \exp(i(\arg(\Psi'(t, \vec{r}') - \arg(\Psi(t, \vec{r})))))) \end{aligned}$$

Таким образом

$$\Psi'(t, \vec{r}') = \Psi(t, \vec{r}) \exp(i(\arg(\Psi'(t, \vec{r}') - \arg(\Psi(t, \vec{r}))))))$$

Укажем, что поскольку обе системы отсчета есть инерциальными, то они могут двигаться одна относительно одной лишь с постоянной скоростью. Поэтому, если в начальный момент времени, эти системы отсчета совпадали, то радиус – вектор “штрихованной” системы отсчета относительно “нештрихованной” в будь – которое момент времени t будет выражаться соотношением $\vec{R}(t) = \vec{v}t$, где \vec{v} - скорость движения “штрихованной” системы относительно нештрихованной”. Тогда $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$. Учитывая это (1.1) можно переписать в виде:

$$\Psi'(t, \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t) = \Psi(t, \vec{r}) \exp(i(\arg(\Psi'(t, \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t) - \arg(\Psi(t, \vec{r}))))),$$

или в виде:

$$\Psi'(t, \vec{r}') = \Psi(t, \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t) \exp\left(i\left(\arg\left(\Psi'(t, \vec{r}')\right) - \arg\left(\Psi(t, \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t)\right)\right)\right),$$

или еще в таком виде

$$\Psi(t, \vec{r}) = \exp\left(-i\left(\arg\left(\Psi'(t, \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t)\right) - \arg\left(\Psi(t, \vec{r})\right)\right)\right) \Psi'(t, \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t).$$

Введем обозначения:

$$f(t, \vec{r}, \vec{v}) = \arg\left(\Psi'(t, \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t) - \arg\left(\Psi(t, \vec{r})\right)\right).$$

С учетом этого обозначения соотношения:

$$\Psi'(t, \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t) = \Psi(t, \vec{r}) \exp(if(t, \vec{r}, \vec{v})).$$

Рассмотренные соотношения пригодны к случаю, если рассматривается преобразование будь – что состояния при переходе с одной инерциальной системы отсчета к другому. Рассмотрим теперь случай, если в обеих системах отсчета рассматривается состояние, собственный для энергии и импульса:

$$\Psi(t, \vec{r}) = N(E, \vec{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + \hbar\left(\vec{k}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}\right)\right)\right),$$

$$\Psi(t, \vec{r}') = N(E', \vec{p}') \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aE't + \hbar\left(\vec{k}(E', \vec{p}') \cdot \vec{r}'\right)\right)\right).$$

Через E и \vec{p} обозначены собственные значения соответственно энергии и импульсу относительно “нештрихованной” системы отсчета, а через E' и \vec{p}' - относительно “штрихованной”. При этом учтено, что в соответствии с принципом относительности физические величины в разных инерциальных системах отсчета могут принимать разные значения, но зависимости между ними должны быть одинаковыми. В частности, собственные состояния для энергии и импульса должны одинаково зависеть вид времени и пространственных координат.

Исходя из приведенных выше соотношений :

$$N(E', \vec{p}') \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aE't + \hbar\left(\vec{k}(E', \vec{p}') \cdot (\vec{r} - \vec{v}t)\right)\right)\right) = N(E, \vec{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + \hbar\left(\vec{k}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}\right)\right)\right) \exp(if(t, \vec{r}, \vec{v}))$$

Или:

$$\begin{aligned} N(E', \vec{p}') \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\left(aE' - \hbar\left(\vec{k}(E', \vec{p}') \cdot \vec{v}\right)\right)t + \hbar\left(\vec{k}(E', \vec{p}') \cdot \vec{r}\right)\right)\right) = \\ = N(E, \vec{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + \hbar\left(\vec{k}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}\right) + \hbar f(t, \vec{r}, \vec{v})\right)\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что по левую сторону от знака равенства в показателе экспоненты находится выражение, которое линейно зависит от координат и времени, приходим к выводу, что и по левую сторону от знака равенства тоже должный находиться выражение, которое линейно зависит от времени и координат. Поэтому неизвестная нам функция $\hbar f(t, \vec{r}, \vec{v})$ должна иметь вид:

$$\hbar f(t, \vec{r}, \vec{v}) = f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{v})t + \left(\vec{f}_2(\vec{v}) \cdot \vec{r}\right),$$

где $f_0(\vec{v})$, $f_1(\vec{v})$, и $\vec{f}_2(\vec{v})$ - новые неизвестные функции.

Подчеркнем на потому, что эти функции не могут зависеть от собственных значений энергии и импульса, так как эти величины являются зависимыми от выбора системы от-

счета, относительно которой они рассматриваются. Вместе с тем функция $f(t, \vec{r}, \vec{v})$ задает правило перехода от одной инерциальной системы отсчета к другому. В соответствии с принципом относительности все инерциальные системы отсчета есть равноправными. Поэтому правило перехода не должно зависеть от будь каких собственных характеристик любой из систем отсчета. Оно может зависеть лишь от относительного движения систем отсчета, который обнаруживается в зависимости этой функции от скорости относительного движения систем отсчета \vec{v} .

Введем обозначения

$$\hbar \vec{k}(E', \vec{p}') = \vec{b}(E', \vec{p}'), \hbar \vec{k}(E, \vec{p}) = \vec{b}(E, \vec{p}).$$

С учетом этого получим:

$$\begin{aligned} N(E', \vec{p}') \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\left(aE' - (\vec{b}(E', \vec{p}') \cdot \vec{v})\right)t + (\vec{b}(E', \vec{p}') \cdot \vec{r})\right)\right) = \\ = N(E, \vec{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + (\vec{b}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}) + f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{v})t + (\vec{f}_2(\vec{v}) \cdot \vec{r})\right)\right). \end{aligned}$$

После преобразований получим:

$$\begin{cases} aE + f_1(\vec{v}) = aE' - (\vec{b}(E', \vec{p}') \cdot \vec{v}) \\ \vec{b}(E', \vec{p}') = \vec{b}(E, \vec{p}) + \vec{f}_2(\vec{v}) \\ N(E', \vec{p}') = N(E, \vec{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} f_0(\vec{v})\right) \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение из этой системы :

$$\vec{b}(E', \vec{p}') = \vec{b}(E, \vec{p}) + \vec{f}_2(\vec{v}).$$

Если мы из системы отсчета “с штрихом” перейдем еще к новой системе отсчета “с двумя штрихами”, которая движется относительно системы “с штрихом” с некоторой скоростью \vec{v}_1 , то аналогично тому как это было сделано вышес получим:

$$\begin{aligned} \vec{b}(E'', \vec{p}'') &= \vec{b}(E', \vec{p}') + \vec{f}_2(\vec{v}_1). \\ \vec{b}(E'', \vec{p}'') &= \vec{b}(E, \vec{p}) + \vec{f}_2(\vec{v}) + \vec{f}_2(\vec{v}_1). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что из исходной системы отсчета “без штриха” к системе отсчета “с двумя штрихами” можно было бы перейти непосредственно, учитывая, что она движется относительно исходной системы отсчета с скоростью $\vec{v} + \vec{v}_1$. Тогда бы мы получили бы

$$\vec{b}(E'', \vec{p}'') = \vec{b}(E, \vec{p}) + \vec{f}_2(\vec{v} + \vec{v}_1).$$

Исходя из приведенных соотношений:

$$\vec{f}_2(\vec{v} + \vec{v}_1) = \vec{f}_2(\vec{v}) + \vec{f}_2(\vec{v}_1).$$

Аналогично поэтому, как это делалось при рассмотрении зависимости от времени состояния собственного для энергии можно показать, что из приведенного функционального уравнения вытекает, что:

$$\vec{f}_2(\vec{v}) = q\vec{v},$$

где q - постоянная величина, которая не зависит от скорости \vec{v} . Отсюда:

$$\vec{b}(E', \vec{p}') = \vec{b}(E, \vec{p}) + q\vec{v}.$$

Благодаря этого равенства можно сделать некоторые выводы относительно зависимостей $\vec{b}(E', \vec{p}')$ и $\vec{b}(E, \vec{p})$. Для этого учтем, что собственные значения энергии и импульса в системе отсчета “с штрихом” должны зависеть от значений этих величин у системы отсчета “без штриха”, и скорости относительного движения этих систем отсчета:

$$E' = E'(E, \vec{p}, \vec{v}),$$

$$\vec{p}' = \vec{p}'(E, \vec{p}, \vec{v}).$$

$$\Psi(t, \vec{r}) = N \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r})\right)\right)$$

$$\Psi'(t', \vec{r}') = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aE't' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{r}')\right)\right)$$

$$\Psi'(t', \vec{r}') = \exp\left(\frac{i}{\hbar} f(\vec{v}, t, \vec{r})\right) \Psi(t, \vec{r})$$

$$N' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aE't' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{r}')\right)\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} f(\vec{v}, t, \vec{r})\right) N \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r})\right)\right)$$

$$N' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aE't' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{r}')\right)\right) = N \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r}) + f(\vec{v}, t, \vec{r})\right)\right)$$

$$aE't' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{r}') + \mathbf{j}' = aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r}) + f(\vec{v}, t, \vec{r}) + \mathbf{j}$$

$$aE't + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot (\vec{r} + \vec{v}t)) + \mathbf{j}' = aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r}) + f(\vec{v}, t, \vec{r}) + \mathbf{j}$$

$$aE't + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot (\vec{r} + \vec{v}t)) + \mathbf{j}' = aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r}) + f(\vec{v}, t, \vec{r}) + \mathbf{j}$$

$$aE't + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{r}) + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{v})t + \mathbf{j}' = aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r}) + f(\vec{v}, t, \vec{r}) + \mathbf{j}$$

$$(aE' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{v}))t + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{r}) + \mathbf{j}' = aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r}) + f(\vec{v}, t, \vec{r}) + \mathbf{j}$$

$$(aE' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{v}))t + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{r}) + \mathbf{j}' = aEt + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{r}) + f_0 + \alpha(\vec{v})t + (\vec{\beta}(\vec{v}) \cdot \vec{r}) + \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}' = f_0 + \mathbf{j}$$

$$aE' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{v}) = aE + \alpha(\vec{v})$$

$$\vec{b}(\vec{p}') = \vec{b}(\vec{p}) + \vec{\beta}(\vec{v})$$

$$\mathbf{j}' = f_0 + \mathbf{j}$$

$$aE' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{v}) = aE + \alpha(\vec{v})$$

$$\vec{b}(\vec{p}') = \vec{b}(\vec{p}) + \vec{\beta}(\vec{v})$$

$$\mathbf{j}' = f_0 + \mathbf{j}$$

$$aE' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{v}) = aE + \alpha(\vec{v})$$

$$\vec{b}(\vec{p}') = \vec{b}(\vec{p}) + \vec{\beta}(\vec{v})$$

$$aE' + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{v}) + (\vec{\beta}(\vec{v}) \cdot \vec{v}) = aE + \alpha(\vec{v})$$

$$\vec{b}(\vec{p}') = \vec{b}(\vec{p}) + \vec{\beta}(\vec{v}_1)$$

$$\vec{b}(\vec{p}'') = \vec{b}(\vec{p}') + \vec{\beta}(\vec{v}_2) = \vec{b}(\vec{p}) + \vec{\beta}(\vec{v}_1) + \vec{\beta}(\vec{v}_2)$$

$$\vec{b}(\vec{p}'') = \vec{b}(\vec{p}) + \vec{\beta}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2),$$

$$\vec{\beta}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{\beta}(\vec{v}_1) + \vec{\beta}(\vec{v}_2) \Rightarrow \beta(\vec{v}) = k\vec{v}$$

$$\mathbf{j}' = f_0 + \mathbf{j}$$

$$aE' + (\vec{b}(\vec{p}') \cdot \vec{v}) = aE + \alpha(\vec{v})$$

$$\vec{b}(\vec{p}') = \vec{b}(\vec{p}) + \vec{\beta}(\vec{v})$$

$$aE' + (\vec{b}(\vec{p}) \cdot \vec{v}) + (\vec{\beta}(\vec{v}) \cdot \vec{v}) = aE + \alpha(\vec{v})$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

$$\vec{p} = \vec{p}' + m\vec{V}, \vec{p}' = \vec{p} - m\vec{V}$$

$$\frac{\vec{p}'^2}{2m} = \frac{(\vec{p} - m\vec{V})^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - (\vec{p} \cdot \vec{V}) + \frac{m\vec{V}^2}{2}$$

$$\Psi(t, \vec{r}) = e^{\frac{i}{\hbar} aEt} \psi(E, \vec{r}), \psi(E, \vec{r}) = N e^{i(\vec{b}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r})}, \Psi(t, \vec{r}) = N e^{\frac{i}{\hbar} (aEt + (\hbar \vec{b}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}))}$$

$$|\Psi'(t', \vec{r}')|^2 dV' = |\Psi(t, \vec{r})|^2 dV, |\Psi'(t', \vec{r}')| = |\Psi(t, \vec{r})|, t' = t, \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t$$

$$|\Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t)| = |\Psi(t, \vec{r})|, \Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t) = |\Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t)| \exp(i \arg(\Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t))),$$

$$\Psi(t, \vec{r}) = |\Psi(t, \vec{r})| \exp(i \arg(\Psi(t, \vec{r}))) = |\Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t)| \exp(i \arg(\Psi(t, \vec{r}))) =$$

$$= |\Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t)| \exp(i \arg(\Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t))) \exp(i(\arg(\Psi(t, \vec{r})) - \arg(\Psi'(t, \vec{r} - \vec{v}t))))$$

$$N \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + \left(\hbar\vec{b}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}\right)\right)\right) = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aE't + \left(\hbar\vec{b}(E', \vec{p}') \cdot (\vec{r} - \vec{v}t)\right)\right) + i\hbar f(t, \vec{r}, \vec{v})\right)$$

$$\hbar\vec{b}(E, \vec{p}) \equiv \vec{\beta}(E, \vec{p}), \hbar f(t, \vec{r}, \vec{v}) = f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{v})t + (\vec{f}_2(\vec{v}) \cdot \vec{r})$$

$$N \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + \left(\vec{\beta}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}\right)\right)\right) =$$

$$= N' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\left(aE' - \left(\vec{\beta}(E', \vec{p}') \cdot \vec{v}\right)\right)t + \left(\vec{\beta}(E', \vec{p}') \cdot \vec{r}\right) + f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{v})t + \left(\vec{f}_2(\vec{v}) \cdot \vec{r}\right)\right)\right)$$

$$N \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(aEt + \left(\vec{\beta}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}\right)\right)\right) =$$

$$= N' \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\left(aE' - \left(\vec{\beta}(E', \vec{p}') \cdot \vec{v}\right) + f_1(\vec{v})\right)t + \left(\left(\vec{\beta}(E', \vec{p}') + \vec{f}_2(\vec{v})\right) \cdot \vec{r}\right) + f_0(\vec{v})\right)\right)$$

$$\begin{cases} aE = aE' - \left(\vec{\beta}(E', \vec{p}') \cdot \vec{v}\right) + f_1(\vec{v}) \\ \vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E', \vec{p}') + \vec{f}_2(\vec{v}) \\ N = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} f_0(\vec{v})\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} aE = aE' - \left(\vec{\beta}(E', \vec{p}') \cdot \vec{v}\right) + f_1(\vec{v}) \\ \vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E', \vec{p}') + \vec{f}_2(\vec{v}) \\ N = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} f_0(\vec{v})\right) \end{cases}$$

$$\vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E', \vec{p}') + \vec{f}_2(\vec{v}_1)$$

$$\vec{\beta}(E', \vec{p}') = \vec{\beta}(E'', \vec{p}'') + \vec{f}_2(\vec{v}_2)$$

$$\vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E'', \vec{p}'') + \vec{f}_2(\vec{v}_2) + \vec{f}_2(\vec{v}_1)$$

$$\vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E'', \vec{p}'') + \vec{f}_2(\vec{v}_2 + \vec{v}_1)$$

$$f_2(\vec{\mathbf{v}}) = k\vec{\mathbf{v}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} aE = aE' - (\vec{\beta}(E', \vec{p}') \cdot \vec{\mathbf{v}}) + f_1(\vec{\mathbf{v}}) \\ \vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E', \vec{p}') + \vec{f}_2(\vec{\mathbf{v}}) \\ N = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} f_0(\vec{\mathbf{v}})\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} aE = aE' - (\vec{\beta}(E', \vec{p}') \cdot \vec{\mathbf{v}}) + f_1(\vec{\mathbf{v}}) \\ \vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E', \vec{p}') + k\vec{\mathbf{v}} \\ N = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} f_0(\vec{\mathbf{v}})\right) \end{array} \right.$$

$$\vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E', \vec{p}') + k\vec{v}$$

$$\vec{\beta}(E, \vec{p}) = \vec{\beta}(E'(E, \vec{p}, \vec{v}), \vec{p}'(E, \vec{p}, \vec{v})) + k\vec{v} \Rightarrow \vec{\beta}(E', \vec{p}') = \vec{\beta}(\vec{p}')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} aE = aE' - (\vec{\beta}(\vec{p}') \cdot \vec{v}) + f_1(\vec{v}) \\ \vec{\beta}(\vec{p}) = \vec{\beta}(\vec{p}') + k\vec{v} \\ N = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} f_0(\vec{v})\right) \end{array} \right.$$

$$\vec{p}'(E, \vec{p}, \vec{v}) = \vec{k}_1 + k_2 \vec{v} = \vec{p} - m\vec{v}, \vec{\beta}(\vec{p}) = \beta_0 \vec{p}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} aE = aE' - \beta_0 (\vec{p}' \cdot \vec{v}) + f_1(\vec{v}) \\ \beta_0 \vec{p} = \beta_0 \vec{p}' + k\vec{v} \\ N = N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} f_0(\vec{v})\right) \end{array} \right.$$

$$aE = aE' - \beta_0 (\vec{p} \cdot \vec{v}) + k\vec{v}^2 + f_1(\vec{v})$$

$$E = E' - \frac{\beta_0}{a} (\vec{p} \cdot \vec{v}) + \frac{k}{a} \vec{v}^2 + \frac{f_1(\vec{v})}{a}$$

$$\frac{\vec{p}'^2}{2m} = \frac{(\vec{p} - m\vec{v})^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - (\vec{p} \cdot \vec{v}) + \frac{m\vec{v}^2}{2}$$

$$E = E' + (\vec{p} \cdot \vec{v}) - \frac{m\vec{v}^2}{2}$$

$$E = E' - \frac{\beta_0}{a} (\vec{p} \cdot \vec{v}) + \frac{k}{a} \vec{v}^2 + \frac{f_1(\vec{v})}{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} E = E' + (\vec{p} \cdot \vec{v}) - \frac{m\vec{v}^2}{2} \\ E = E' - \frac{\beta_0}{a} (\vec{p} \cdot \vec{v}) + \frac{k}{a} \vec{v}^2 + \frac{f_1(\vec{v})}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{\beta_0}{a} = 1, \beta_0 = -a, \frac{k}{a} \vec{v}^2 + \frac{f_1(\vec{v})}{a} = -\frac{m\vec{v}^2}{2}$$

$$\hbar \vec{b}(E, \vec{p}) \equiv \vec{\beta}(E, \vec{p}) = -a\vec{p}$$

$$\vec{b}(E, \vec{p}) = -\frac{a}{\hbar} \vec{p}$$

$$\Psi(t, \vec{r}) = N e^{\frac{i}{\hbar} (aEt + (\hbar \vec{b}(E, \vec{p}) \cdot \vec{r}))} = N e^{\frac{i}{\hbar} (aEt - a(\vec{p} \cdot \vec{r}))} = N \exp\left(a \frac{i}{\hbar} (Et - (\vec{p} \cdot \vec{r}))\right)$$

$$\Psi(t, \vec{r}) = N \exp\left(a \frac{i}{\hbar} (Et - (\vec{p} \cdot \vec{r}))\right)$$

Литература

1. Ландау Л.Д, Лифшиц Э.М. Теоретическая физика. Учебное пособие в 10 т. Т.3 Квантовая механика (нерелятивистская теория) – М.: Наука, 1990, 768 с
2. Флюгге З. Задачи по квантовой механике Т. 1,2, М: Мир, 1997, 341 с.
3. Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика с задачами.- М: Наука, 1996, 336 с.
4. Сборник задач по квантовой механике – М. Наука, 1997, 275с
5. Галицкий В.М, Карнаков Б.М, Коган В.И. Задачи по квантовой механике – М: Наука, 1991, 647 с